NÚMEROS COMPLEXOS

Este conjunto surgiu da necessidade de resolver radiciações do tipo :

$\sqrt{-4}$; $\sqrt[4]{-16}$; $\sqrt[100]{-1}$; $\sqrt{-9}$ ....

1. Unidade imaginária

É o número **i**, tal que:

$$\boxed{i^2 = -1}$$

2. Definição de um número complexo

É todo número do tipo:

$$\boxed{z = a + b \, . \, i}$$

Onde: $\begin{cases} a \in R, \text{ a = parte real do complexo;} \\ b \in R, \text{ b = coef. da parte imaginária;} \\ \text{i = unidade imaginária,} \end{cases}$

$$\boxed{C = \{ z \mid z = a + bi, a \in R \text{ e } b \in R \}}$$

é o conjunto dos números complexos.

3. Imaginários puros

z = a + bi, se a = 0 e b ≠ 0, então **z = bi**

(é um imaginário puro).

4. Números reais

z = a + bi, se b = 0 então **z = a**
(é um número real; logo, todo número real é complexo).

5. Conjugado de um número complexo

Se $\boxed{z = a + bi \text{ então } w = a - bi}$

Onde **w** é o conjugado de **z.**

1. Propriedades

a) $\overline{Z_1 + Z_2} = \overline{Z_1} + \overline{Z_2}$

b) $\overline{Z_1 \cdot Z_2} = \overline{Z_1} \cdot \overline{Z_2}$

c) $\overline{Z^n} = (\overline{Z})^n$

d) $\overline{\left(\dfrac{Z_1}{Z_2}\right)} = \dfrac{\overline{Z_1}}{\overline{Z_2}}$, onde $\overline{Z_2} \neq 0$

6. Igualdade de complexos

$$\begin{cases} z_1 = a + b \, . \, i \\ z_2 = c + d \, . \, i \end{cases} \Rightarrow z_1 = z_2 \Leftrightarrow a = c \text{ e } b = d$$

7. Operações com números complexos

Sendo: i = unidade imaginária

z = a + b. i **e** **w = c + d . i**

Temos as seguintes operações:

7.1 Potências de i

$$i^0 = i^4 = i^8 = i^{12} = i^{16} = ... = 1$$
$$i^1 = i^5 = i^9 = ... = i$$
$$i^2 = i^6 = i^{10} = ... = -1$$
$$i^3 = i^7 = i^{11} = ... = -i$$

Ou seja, só existem quatro possíveis valores para as potências de **i**:

(1; - 1; i ; - i)

Para calcular tais potências, basta dividir o expoente por 4 e trabalhar só com o resto, por exemplo:

$$\begin{array}{r|l} n & 4 \\ \hline \mathbf{r} & q \end{array}$$

$$\boxed{i^n = i^r}$$

7.2 Adição

$$\boxed{z + w = (a + c) + (b + d) \, . \, i}$$

7.3 Subtração

$$\boxed{z - w = (a - c) + (b - d) \, . \, i}$$

7.4 Multiplicação

$$\boxed{\begin{aligned} z \, . \, w &= (a + bi) \, . \, (c + di) \\ &= (a.c - b.d) + (a.d + c.b).i \end{aligned}}$$

Ou, efetua-se a multiplicação de complexos aplicando-se a **propriedade distributiva** da multiplicação (abrem-se os parênteses) e usa-se o fato de que $\mathbf{i^2 = -1}$.

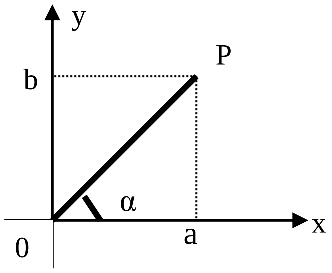
7.5 Divisão

$$\boxed{\frac{z}{w} = \frac{(a + bi)}{(c + di)} \, . \, \frac{(c - d\,i)}{(c - d\,i)}}$$

Assim, obtém-se o quociente de dois complexos multiplicando-se o numerador e denominador da fração pelo **conjugado** do denominador.

8. Representação gráfica do complexo

O número complexo **z = a + bi**, $a \in R$ e $b \in R$, é representado pelo ponto P de coordenadas (a; b) no plano de Argand-Gauss.



$$|z| = \overline{OP}$$

8.1 Módulo

$$|Z| = |a+bi| = \sqrt{a^2+b^2}$$

É um número real que representa a distância do afixo de **Z** à origem **O** do sistema de coordenadas.

8.2 Argumento

É o ângulo **α** determinado pelo eixo real **Ox** e o segmento **OP**, medido no sentido anti-horário a partir do eixo real.

$$\cos\alpha = \frac{a}{|Z|} \qquad \text{sen}\ \alpha = \frac{b}{|Z|}$$

9. Forma trigonométrica

z = a + bi ⇔ z = $|z|$. (cos α + i . sen α)

10. Operações na forma trigonométrica

Sendo $Z_1 = \rho_1(\cos\theta_1 + i\,.\,\text{sen}\,\theta_1)$

$Z_2 = \rho_2(\cos\theta_2 + i\,.\,\text{sen}\,\theta_2)$

10.1 Multiplicação

$$Z_1 \cdot Z_2 = \rho_1 \cdot \rho_2 [\cos(\theta_1+\theta_2) + i\,.\,\text{sen}\,(\theta_1+\theta_2)]$$

10.2 Divisão

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}[\cos(\theta_1-\theta_2) + i\,.\,\text{sen}\,(\theta_1-\theta_2)]$$

10.3 Potenciação de complexos (1ª fórmula de "De Moivre")

$$Z^n = \rho^n [\cos(n.\theta) + i\,.\,\text{sen}\,(n.\theta)]$$

Onde, n pertence aos Naturais

10.4 Radiciação de complexos (2ª fórmula de Moivre)

Seja $z = \rho(\cos\theta + i\,.\,\text{sen}\,\theta)$ e o número natural n ($n \geq 2$), então existem n raízes enésimas de z que são da forma:

$$\sqrt[n]{z} = Z_k \Leftrightarrow {Z_k}^n = z$$

$$Z_k = \sqrt[n]{\rho}\left[\cos\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right) + i\,.\,\text{sen}\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)\right]$$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Considere a função quadrática f (x) = x^2 + x cos α + sen α.

a) Resolva a equação f (x) = 0 para α = $\frac{3\pi}{2}$.

b) Encontre os valores de α para os quais o número complexo $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ é raiz da equação f(x) + 1 = 0.

SOLUÇÃO

a) $x^2 + x\cos\frac{3\pi}{2} + \text{sen}\,\frac{3\pi}{2} = 0 \quad \therefore \quad x^2 - 1 = 0$

$\therefore$ x = ± 1 → S = {–1, 1}

b) x^2 + x cos α + sen α + 1 = 0

Sendo os coeficientes números reais, se $\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ é raiz, então também é.

Assim, da soma e do produto das raízes, temos:

$$\begin{cases} \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = -\cos\alpha \\ \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \text{sen}\,\alpha + 1 \end{cases} \quad \therefore \quad \begin{cases} \cos\alpha = -1 \\ \text{sen}\alpha = 0 \end{cases}$$

De onde se conclui que:

$\alpha = \pi + h \cdot 2\pi$, $h \in Z$

2. Dado um número complexo $z = x + iy$, o seu conjugado é o número complexo $\bar{z} = x - iy$.

a) Resolva as equações: $z.\bar{z} = 4$ e $(\bar{z})^2 = z^2$.

b) Ache os pontos de intersecção dos lugares geométricos que representam as soluções dessas equações

SOLUÇÃO

a) Seja z = x + yi, com x, $y \in R$. Então

(I) $z.\bar{z} = 4 \Leftrightarrow (x + yi)(x - yi) = 4 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 4$ e

(II) $(\bar{z})^2 = z^2 \Leftrightarrow (x - yi)^2 = (x + yi)^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 - 2xyi - y^2 = x^2 + 2xyi - y^2 \Leftrightarrow 4xyi = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow xy = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $y = 0$

Assim, as soluções (I) e (II) são dadas, respectivamente, por

$V_I = \{z \in C |\ z = x + yi$ e $x^2 + y^2 = 4$, x, $y \in R\}$ e

$V_{II} = \{z \in C |\ z = \alpha$ ou $z = \alpha i$, $\alpha \in R\}$

b) Os pontos de intersecção são as soluções do sistema

$$\begin{cases} x^2+y^2=4 \\ (x=0 \text{ ou } y=0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x=0 \text{ e } y^2=4) \\ \text{ou} \\ (y=0 \text{ e } x^2=4) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x=0 \text{ e } y=\pm 2) \\ \text{ou} \\ (y=0 \text{ e } x=\pm 2) \end{cases}$$

Assim, os pontos de intersecção são (0,-2), (0,2), (2,0) e (2,0).

3. Se z = (2 + i) · (1 + i) · i , então , o conjugado de z, será dado por

SOLUÇÃO

$z = (2 + i)(1 + i) \cdot i \rightarrow z = (2 + 2i + i + i^2) \cdot i \rightarrow z = (1 + 3i) \cdot i$
$z = i + 3i^2 \rightarrow z = -3 + i$.

Logo o conjugado de z é -3 - i

<u>QUESTÕES PROPOSTAS</u>

1. O número complexo $(1 + 3i)^{-2}$, quando expresso na forma x + yi onde $x, y \in \Re$, é igual a:

a) 1 – 9i
b) 0,08 + 0,06 i
c) – 0,08 – 0,06 i
d) 0,01 – 0,09 i

2. Se i é a unidade imaginária, a expressão complexa $\frac{7+3i}{1\text{-}i}+\frac{3-5i}{1+i}$ é igual a:

a) 1 + 6 i
b) 1 + i
c) 4 + i
d) 1 + 4 i

3. O valor de a, no intervalo $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, para o qual o número complexo x = cos a + i.sen*a* é tal que $x^2 = \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}.i$, satisfaz:

a) $\frac{\pi}{3}<a<\frac{\pi}{2}$
b) $\frac{\pi}{6}<a<\frac{\pi}{3}$
c) $\frac{\pi}{6}<a<\frac{\pi}{4}$
d) $\frac{\pi}{10}<a<\frac{\pi}{5}$

4. Os valores de p e q para os quais a unidade complexa i é a raiz da equação $x^3 + px^2 + x + q = 0$ satisfazem a condição:

a) p + q = 1
b) p + q = 0
c) p – q = 0
d) 2p + q =0

5. Se $i = \sqrt{-1}$, então o quarto termo no desenvolvimento de $(1 + i)^6$ é:

a) 15 i
b) – 15 i
c) 20 i
d) – 20 i

6. O módulo do complexo $\overline{1+2i}+i(1-i)-\frac{2}{1+i}$ é:

a) $\sqrt{2}$
b) $\sqrt{3}$
c) $\sqrt{5}$
d) 1

7. Se a soma dos valores complexos $z + 2\bar{z} + 3z + 4\bar{z}$ é 320 + 28i , onde $\bar{z}$ é o conjugado de z, então:

a) z = 10 – 2i
b) z = 10 + 2i
c) z = 32 – 14i
d) z = 32 – 2i

8. Os valores dos números reais a e b, de forma que o número complexo $\frac{1+i}{1-i}$ seja igual a a + bi, são:

a) a = 0 e b = – 1
b) a = 1 e b = 0
c) a = 0 e b = 1
d) a = – 1 e b = 0

9. Seja o número complexo $z = 1^{101}+ 1^{102} + 1^{103} + 1^{104} + 1^{105}\ 1^{106}$. Calculando-se z^2, obtém-se:

a) – 2i
b) 2i
c) – 1 + i
d) 2 – 2i

10. Para que (5 – 2i) (k + 3i) seja um número real, o valor de k deverá ser:

a) $\frac{2}{15}$
b) $-\frac{2}{15}$
c) $\frac{15}{2}$
d) 0

11. Sabendo-se o complexo z = a + bi satisfaz a expressão i z + 2z = 2i – 11, então z^2 é igual a:

a) 17 – 24i
b) 25 – 24i
c) 25 + 24i
d) 7 – 24 i

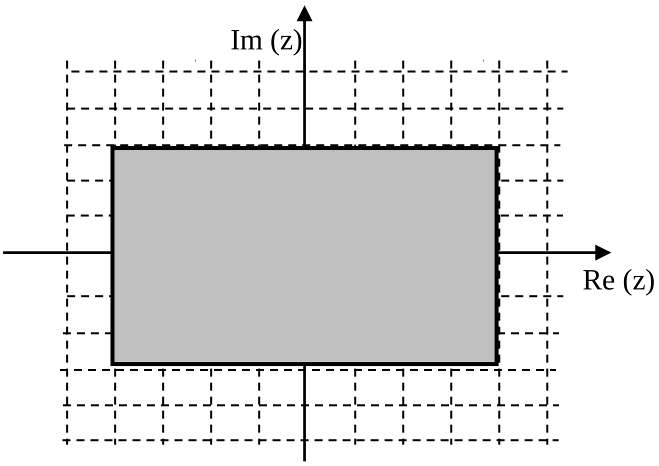
12. A representação cartesiana dos números complexos 1 + 2i, – 2 + i e – 1 – 2i são vértices de um quadrado. O quarto vértice desse quadrado corresponde a:

a) 1 – i
b) 2 – i
c) 1 + i
d) 1 – 2i

13. Um complexo z possui módulo igual a 2 e argumento $\frac{\pi}{3}$ .Sendo $\bar{z}$ o conjugado de z, a forma algébrica de $\bar{z}$ é:

a) $1 - \sqrt{3}\,i$
b) $\sqrt{3} - i$
c) $\sqrt{3} + i$
d) $1 + \sqrt{3}\,i$

14. Os vértices do retângulo sombreado da figura abaixo representam os números complexos p, q, r e s.



Pode-se afirmar que p + q + r +s é o número complexo:

a) – i
b) 1
c) 0
d) 1 + i

15. Sobre o número complexo $(1-i)^{1000}$, pode-se afirmar que:

a) é um número imaginário puro;
b) é um número real negativo;
c) tem módulo igual a 1;
d) é um número real positivo.

16. Sabendo que x é um número real e que a parte imaginária do número complexo $\frac{2+i}{x+2i}$ é zero, então x é:

a) – 4
b) 1
c) 2
d) 4

17. Seja z o número complexo $\frac{1-\sqrt{3}\,i}{2}$, em que $i = \sqrt{-i}$.

Então, $\frac{1}{z^2 - z}$, é:

a) – 2
b) – 1
c) $1 + i\sqrt{3}$
d) 1

18. Sejam p o produto das raízes da equação complexa $z^3 = i$ e q a soma das raízes da equação complexa $z^2+(2+i)z + 2i = 0$. O valor do produto p.q é:

a) –2i – 1
b) –2i + 1
c) –2i + 2
d) –2i – 2

19. Se z = x + yi é um número complexo, onde x e y são números reais, define-se o conjugado de z como sendo o número $\bar{z} = x - yi$. Considerando os números $z_1 = 2 + 3i$, $z_2 = 5 + 7i$ e $z_3 = 3 - 5i$, o resultado de $z_1 . \bar{z}_2 + z_2 . \bar{z}_3 - \bar{z}_1 . z_3$ é:

a) 20 + 66i
b) 20 – 55i
b) 10 – 66i
c) 10 + 55i

20. Para os números complexos z = 3 + 4i e w = 4 – 3i, onde $i^2 = -1$, a soma $\frac{z}{w} + \frac{w}{z}$ é igual a:

a) 0
b) 2i
c) 1
d) –2i

“O homem começa a morrer na idade em que perde o entusiasmo.”

BALZAC

GABARITO

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
C	B	D	C	D	D	C	C	A	C
11	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
D	B	A	C	D	D	B	B	A	A